Théorème (Dirichlet)**.** *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$*, on montre qu'il existe un infinité de couples* $(p,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ *tels que*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2}$$

Démonstration. Pour l'existence d'un tel couple, soit $N \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\{k\alpha - E(k\alpha), k \in [(0;N)]\} \subset [0,1[= \bigcup_{i=0}^{N-1} [\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N}[$$

où E désigne la fonction partie entière. Le principe des tiroirs assure qu'il existe un des $[\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N}[$ contenant deux différences, *i.e.* $\exists\ k < l$ et un $i \in [(0;N-1)]$ tels que $k\alpha - E(k\alpha),\ l\alpha - E(l\alpha) \in [\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N}[$. On pose alors $q = l - k \in \mathbb{N}^*$ et $p = E(k\alpha) - E(l\alpha) \in \mathbb{Z}$. On a alors :

$$|q\alpha - p| \leq \frac{1}{N} \leq \frac{1}{q} \text{ soit } \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2}$$

On a donc prouvé l'existence de tels couples, supposons qu'il n'y en a qu'un nombre fini. Il en existe donc un pour lequel la distance $d = |q\alpha - p|$ soit minimale. Comme $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, $d > 0$, et donc il existe $N \in \mathbb{N}^* \mid \frac{1}{N} < d$. Avec ce qu'il vient d'être fait, $\exists\ (p', q') \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ tels que

$$|q'\alpha - p'| \leq \frac{1}{N} < d \text{ et } \left|\alpha - \frac{p'}{q'}\right| \leq \frac{1}{q'^2}$$

ce qui contredit la minimalité de (p,q). □

Proposition. *Si* $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$*, alors* $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{N}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$*.*

Démonstration. Comme $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, $G = \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ (Cf FGN Analyse I). Soit $a < b$, on veut trouver un élément de $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{N}$ dans $]a,b[$. Soit $x = u + \alpha v \in G$ tel que $0 < x < b - a$. Si $v \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{N}$. Soit $n_0 \in \mathbb{Z} \mid n_0 < a$. Alors $(kx + n_0)_{k\geq 0} \subset \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{N}$. Si cet ensemble ne rencontre pas $]a,b[$, alors $\exists\ k_0 \mid k_0 x + n_0 \leq a$ et $(k_0+1)x + n_0 \geq b$, ce qui contredit $0 < x < b - a$. Si $v < 0$, on procède de même avec $(n_0 - kx)_k$ pour $n_0 > b$. □

Corollaire. $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *est dense dans* $[-1,1]$.

Démonstration. D'après la proposition précédente, $\mathbb{Z} + \frac{1}{2\pi}\mathbb{N}$ est dense dans $\mathbb{R}$. En utilisant le fait que $t \mapsto \sin(2\pi t)$ soit continue et la 2π-périodicité de la fonction sin, on a le résultat voulu. □

Application. *Étude de la suite* $\left(\frac{1}{n \sin n}\right)_n = (u_n)_n$.

D'après le corollaire, il existe une extractrice $(k_n)_n$ telle que $\sin k_n \underset{n}{\to} 1$, et donc la suite extraite (u_{k_n}) tend vers 0. On va montrer que u ne converge pas vers 0. L'idée est de construire une infinité de points de $(u_n)_n$ qui sont tous éloignés de 0 uniformément. Pour cela il faut s'assurer que u_n reste grand, soit que $n \sin n$ soit petit, donc que n soit proche de $\pi\mathbb{Z}$, ce qui équivaut à $\frac{n}{\pi}$ proche de $\mathbb{Z}$.

Posons $\alpha = \frac{1}{\pi} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, alors $\sin n = \sin \pi\alpha n$. On va contrôler la distance de $n\alpha$ à $\mathbb{Z}$ à l'aide du théorème de Dirichlet. Soit

$$\mathcal{E} = \left\{ q \in \mathbb{N}^* \mid \exists\ p \in \mathbb{Z} \text{ tq } \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2} \right\}$$

Si $\mathcal{E}$ était majoré, on aurait pour tout (p,q) vérifiant la relation que $|p| - |\alpha| q \leq \frac{1}{q} \leq 1$, et donc $|p| \leq 1 + |\alpha| q$. Il n'y a donc qu'un nombre fini de couple (p,q), ce qui est absurde. Donc $\mathcal{E}$ n'est pas majoré. On peut donc construire une suite strictement croissante de $(q_n)_n$ dans $\mathcal{E}$ et une suite $(p_n)_n$ telles que $\forall n,\ |\alpha q_n - p_n| \leq \frac{1}{q_n}$. Ainsi :

$$|\sin(\pi\alpha q_n)| = |\sin(\pi(\alpha q_n - p_n))| \leq \pi|\alpha q_n - p_n| \leq \frac{\pi}{q_n}$$

Donc :

$$|u_{q_n}| = \frac{1}{q_n \sin(\pi\alpha q_n)} \geq \frac{1}{\pi}$$

Si u convergeait, elle convergerait forcément vers 0, et donc $\frac{1}{\pi} \leq 0$, c'est absurde. Donc la suite diverge. *C.Q.F.D.*